

UPC	:	2272202302
Name of the Paper	:	Optimisation Method for Economics
Name of the Course	:	B.A (Prog) Major
Semester	:	Semester III
Duration	:	3 hours
Maximum Marks	:	90 Marks

Set A

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. All questions carry equal marks (18 marks each).
3. Attempt any five questions.
4. Note: Answers may be written either in English or in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.
5. Use of a simple non-programmable calculator is allowed.

1. (a) Naveen derives satisfaction from coffee (X) and croissants (Y). His utility is:

$$U(X, Y) = X^{0.2} Y^{0.8}$$

The price of coffee is $P_X = 40$ per cup and the price of croissants is $P_Y = 60$ per piece.

Naveen's monthly income is, $I = 2000$.

- i) Using the Lagrange multiplier method, determine Naveen's optimal consumption bundle (X^*, Y^*) . (5)
- ii) Is the second order condition satisfied? (4)

(b) Consider the time-dependent production function: $Y = A(t)K(t)^b L(t)^p$, where $A(t)$, $K(t)$ and $L(t)$ represent the level of technology, capital stock and labour at time t .

i) Find the partial derivatives $\frac{\delta Y}{\delta L}$ and $\frac{\delta Y}{\delta K}$. (4)

ii) Determine the total derivative dY/dt . (5)

2. a) (i) The relationship between utility and consumption is given implicitly by

$$F(U, x, y) = U - x^{0.5} y^{0.5} = 0$$

Use the Implicit-Function rule to find $\frac{\delta U}{\delta x}$ and $\frac{\delta U}{\delta y}$. (5)

(ii) Using the inverse-function rule, find $\frac{dU}{dx}$ for the following function:

$$x = U^2 + U \quad (U > 0). \quad (4)$$

b) The supply function of an agricultural good is: $Q_s = a + bP^2 + T^{0.5}$, $a, b > 0$

where Q_s is the quantity supplied, P is the market price and T is temperature.

(i) Determine the elasticity of supply with respect to temperature and elasticity of supply with respect to price. Also interpret the sign of each elasticity in economic terms. (5)

(ii) Using derivatives, show the effect of an increase in average temperature T on the elasticities obtained in part (i). (4)

3. a) A firm faces cost $C(Q) = Q^3 - 15Q^2 + 63Q + 50$ and inverse demand $P(Q) = 90 - 3Q$. (i) Find the profit-maximizing output and the maximum profit. (5)

(ii) Also, verify the second-order condition(s) for a maximum. (4)

(b) Consider an open economy where equilibrium in the goods market and money market is determined by the following equations:

$$I + X = S + M \quad \text{and} \quad M_d = M_s$$

where

$I = f(r)$ is Investment expenditure, $X = X_0$ is export, $S = g(Y, r)$ is savings, $M = h(Y)$ is imports

$M_d = M(Y, r)$ is the quantity demanded of money, and $M_s = M_0$ is money supply.

Y denotes national income and r denotes the rate of interest.

All functions are continuously differentiable. And the following properties hold:

$$f'(r) < 0, \quad 0 < g_Y < 1, \quad g_r > 0, \quad 0 < h'(Y) < 1, \quad M_Y > 0, \quad M_r < 0$$

Here X_0 and M_0 are exogenous variables, while Y and r are endogenous variables.

(c)

(i) Verify whether the conditions of the Implicit Function Theorem are satisfied for this system. If so, write the equilibrium identities expressing Y and r as functions of exports and imports (X_0 and M_0). (5)

(ii) Interpret the economic meanings of the derivatives g_Y and $h'(Y)$. (4)

4. (a) Consider a firm producing goods in two different markets. The profit function of the firm is $10Q_1^3 + 8Q_2^2 - 2Q_1^2 - Q_2^2 - Q_1Q_2$.

(i) Find the profit maximizing output in both the markets. Also find the maximum profit of the firm. (5)

(ii) Check the second order conditions for profit maximisation. (4)

(b) (i) Determine whether $q = 3u_1^2 - 2u_1u_2 + 4u_1u_3 + 5u_2^2 + 4u_3^2 - 2u_2u_3$ is either positive definite or negative definite? (5)

(ii) Find: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x}$ (4)

5 (a) In the market for wheat, the demand and supply functions are given by:

$$Q_D = A + BP \qquad Q_S = C + DP$$

where A, B, C and D are parameters. A, D > 0 and B, C < 0.

(i) Compute the equilibrium price P^* and $\frac{\delta P^*}{\delta A}$. Interpret the sign of this partial derivative. (5)

(ii) Show graphically the effect of an increase in A on P^* and Q^* . (4)

(b) Consider the following production function: $Q = L^a K^b$ ($0 < a, b < 1$) where K represents capital and L represents labor. ($L, K > 0$). Using derivative conditions, determine whether the function is concave or convex if (i) $a + b < 1$, (ii) $a + b = 1$ and (iii) $a + b > 1$ (9)

6 (a) Consider the following production function: $Q = L^3 + K^3 + 2KL^2$

(i) Find the first order total differential of Q. What is its economic interpretation? (5)

ii. Find the second order total differential of Q. (4)

(b) Consider the production function $Q = 2L^3 - 11L^2K + 3K^2$, where L, K and Q denote labor, capital and output respectively.

(i) Test whether the function is homogenous. If so, find the degree of homogeneity. (5)

(ii) Test Euler's Theorem for a Cobb Douglas production function. (4)

1. (a) नवीन को कॉफी (X) और क्रोइसां (Y) से संतुष्टि प्राप्त होती है। उसकी उपयोगिता फलन है:

$$U(X, Y) = X^{0.2} Y^{0.8}$$

कॉफी का मूल्य ($P_X = 40$) प्रति कप है तथा क्रोइसां का मूल्य ($P_Y = 60$) प्रति पीस है। नवीन की मासिक आय ($I = 2000$) है।

(i) लैग्रांज गुणक विधि का उपयोग करते हुए नवीन के इष्टतम उपभोग बंडल $((X^*, Y^*))$ का निर्धारण कीजिए।

(5)

(ii) क्या द्वितीय कोटि की शर्त (Second Order Condition) संतुष्ट होती है?

(4)

(b) समय-निर्भर उत्पादन फलन पर विचार कीजिए:

$$Y = A(t) K(t)^{\alpha} L(t)^{\beta}$$

जहाँ $(A(t))$, $(K(t))$ और $(L(t))$ क्रमशः समय (t) पर प्रौद्योगिकी का स्तर, पूँजी भंडार और श्रम को दर्शाते हैं।

(i) आंशिक डेरिवेटिव $(\frac{\partial Y}{\partial L})$ ज्ञात कीजिए।

(4)

(ii) कुल डेरिवेटिव $(\frac{dY}{dt})$ ज्ञात कीजिए।

(5)

2. (a)

(i) उपयोगिता और उपभोग के बीच संबंध अप्रत्यक्ष रूप से निम्न प्रकार दिया गया है:

$$F(U, x, y) = U - x^{0.5} y^{0.5} = 0$$

अप्रत्यक्ष फलन नियम (Implicit Function Rule) का उपयोग करते हुए

$(\frac{\partial U}{\partial x})$ और $(\frac{\partial U}{\partial y})$ ज्ञात कीजिए। (5)

(ii) प्रतिलोम फलन नियम (Inverse Function Rule) का उपयोग करते हुए निम्न फलन के लिए

$(\frac{dU}{dx})$ ज्ञात कीजिए: $x = U^2 + U \quad (U > 0)$ (4)

(b) एक कृषि वस्तु का आपूर्ति फलन है:

$$Q_s = a + bP^2 + T^{0.5}, \quad a, b > 0$$

जहाँ (Q_s) आपूर्ति की गई मात्रा है, (P) बाजार मूल्य है और (T) तापमान है।

(i) तापमान के सापेक्ष आपूर्ति की लोच तथा मूल्य के सापेक्ष आपूर्ति की लोच ज्ञात कीजिए। साथ ही, प्रत्येक लोच के चिह्न की आर्थिक व्याख्या कीजिए।

(5)

(ii) डेरिवेटिव का उपयोग करते हुए यह दर्शाइए कि औसत तापमान (T) में वृद्धि का भाग (i) में प्राप्त लोचों पर क्या प्रभाव पड़ता है।

(4)

3. (a) एक फर्म का लागत फलन है:

$$C(Q) = Q^3 - 15Q^2 + 63Q + 50$$

और प्रतिलोम मांग फलन है: $P(Q) = 90 - 3Q$

(i) लाभ-अधिकतम उत्पादन स्तर तथा अधिकतम लाभ ज्ञात कीजिए।

(5)

(ii) अधिकतम के लिए द्वितीय कोटि की शर्तों का सत्यापन कीजिए।

(4)

(b) एक खुली अर्थव्यवस्था पर विचार कीजिए जहाँ वस्तु बाजार और मुद्रा बाजार में संतुलन निम्न समीकरणों द्वारा निर्धारित होता है:

$$I + X = S + M$$

और $M_d = M_s$ जहाँ

($I = f(r$) निवेश व्यय है,

($X = X_0$) निर्यात है,

($S = g(Y, r)$) बचत है,

($M = h(Y)$) आयात है,

($M_d = M(Y, r)$) मुद्रा की मांग है तथा

($M_s = M_0$) मुद्रा आपूर्ति है।

यहाँ (Y) राष्ट्रीय आय तथा (r) ब्याज दर को दर्शाता है। सभी फलन सतत डेरिवेटिव हैं और निम्न गुण दिए गए हैं: $f(r) < 0, \quad 0 < g_Y < 1, \quad g_r > 0,$

$$0 < h'(Y) < 1, \quad M_Y > 0, \quad M_r < 0$$

यहाँ (X_0) और (M_0) बाह्य (exogenous) चर हैं जबकि (Y) और (r) अंतर्जात (endogenous) चर हैं।

(i) जाँच कीजिए कि क्या इस तंत्र के लिए अप्रत्यक्ष फलन प्रमेय (Implicit Function Theorem) की शर्तें संतुष्ट होती हैं।

यदि हाँ, तो संतुलन समीकरण लिखिए जिनमें (Y) और (r) को (X_0) और (M_0) के फलन के रूप में व्यक्त किया गया हो। (5)

(ii) निम्न अवकलजों के आर्थिक अर्थ की व्याख्या कीजिए: (g_Y) तथा $(h'(Y))$ । (4)

4. (a) एक फर्म दो अलग-अलग बाजारों में वस्तुएँ उत्पादन करती है। फर्म का लाभ फलन है:

$$\pi = 10Q_1 + 8Q_2 - 2Q_1^2 - Q_2^2 - Q_1Q_2$$

(i) दोनों बाजारों में लाभ-अधिकतम उत्पादन ज्ञात कीजिए तथा फर्म का अधिकतम लाभ ज्ञात कीजिए।

(5)

(ii) लाभ-अधिकतमकरण के लिए द्वितीय कोटि की शर्तों की जाँच कीजिए।

(4)

(b)

(i) निर्धारित कीजिए कि निम्न द्विघात रूप धनात्मक निश्चित (positive definite) है या ऋणात्मक निश्चित (negative definite):

$$q = 3u_1^2 - 2u_1u_2 + 4u_1u_3 + 5u_2^2 + 4u_3^2 - 2u_2u_3$$

(5)

(ii) निम्न सीमा ज्ञात कीजिए:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2x}{x - 2}$$

(4)

5. (a) गेहूँ के बाजार में मांग और आपूर्ति फलन दिए गए हैं:

$$[Q_d = A + BP, \quad Q_s = C + DP]$$

जहाँ $(A, D > 0)$ तथा $(B, C < 0)$ हैं।

(i) संतुलन मूल्य (P^*) तथा $(\frac{\partial P^*}{\partial A})$ की गणना कीजिए।

इस आंशिक अवकलज के चिन्ह की व्याख्या कीजिए।

(5)

(ii) (A) में वृद्धि का (P^*) और (Q^*) पर प्रभाव आरेखात्मक रूप से दर्शाइए।

(4)

(b) निम्न उत्पादन फलन पर विचार कीजिए:

$$[Q = L^a K^b]$$

जहाँ $(0 < a, b)$ हैं और $(L, K > 0)$ ।

डेरिवेटिव शर्तों का उपयोग करते हुए निर्धारित कीजिए कि फलन अवतल (concave) है या उत्तल (convex), यदि:

(i) $(a + b < 1)$

(ii) $(a + b = 1)$

(iii) $(a + b > 1)$

6. (a) निम्न उत्पादन फलन पर विचार कीजिए:

$$[Q = L^3 + K^2 + 2KL]$$

(i) (Q) का प्रथम कोटि का कुल डेरिवेटिव ज्ञात कीजिए।

इसकी आर्थिक व्याख्या कीजिए।

(5)

(ii) (Q) का द्वितीय कोटि का कुल डेरिवेटिव ज्ञात कीजिए।

(4)

(b) निम्न उत्पादन फलन पर विचार कीजिए:

$$Q = 2L^3 - 11LK + 3K^2$$

जहाँ (L), (K) और (Q) क्रमशः श्रम, पूँजी और उत्पादन को दर्शाते हैं।

(i) जाँच कीजिए कि क्या फलन समघात (Homogeneous) है।

यदि हाँ, तो समघात की डिग्री ज्ञात कीजिए।

(5)

(ii) कॉब-डगलस उत्पादन फलन के लिए ऑयलर प्रमेय (Euler's Theorem) की विवेचना कीजिए।

(4)